ӘОЖ 519.11.4

6-9 СЫНЫП «ТЕҢДЕУЛЕР» ТАҚЫРЫБЫН ЗЕРДЕЛЕУ КЕЗІНДЕ ФУНКЦИОНАЛДЫҚ МАТЕМАТИКАЛЫҚ САУАТТЫЛЫҚТЫ ҚАЛЫПТАСТЫРУ

Аманшина Таңшолпан Қазанғапқызы
Angel_girl_93.kz@mail.ru
«Математика. Білім беру үдерісін басқару»
білім беру бағдарламасының 2 курс магистранты
Х.Досмұхамедов атындағы Атырау университеті, Атырау қ, Қазақстан Республикасы
Ғылыми жетекшісі, профессор – **Асанова А.Т.**

Аңдатпа

Мақала "теңізші" (теңдеулер) тақырыбын зерттеу барысында 6-9 сынып оқушыларында функционалдық математикалық сауаттылықты қалыптастыру процесін зерттейді. Жұмыста әр түрлі теңдеулер мен олардың жүйелерін шешу арқылы оқушылардың логикалық және аналитикалық ойлауын дамытуға бағытталған әдістер мен тәсілдер қарастырылады. Математикалық ұғымдарды түсінуді жақсартуға және өзіндік жұмыс дағдыларын дамытуға ықпал ететін теориялық білімді практикалық тапсырмалармен біріктіруге ерекше назар аударылады. Автор тиімді педагогикалық стратегияларды, сондай-ақ жобалау жұмыстары және ақпараттық-коммуникациялық технологияларды пайдалану сияқты белсенді оқыту әдістерінің рөлін талдайды. Мақаланың қорытындысы мектеп оқушыларының білімін ғана емес, сонымен бірге математикалық тұжырымдамаларды нақты өмірлік жағдайларда қолдану қабілетін қалыптастырудың маңыздылығын атап көрсетеді, бұл функционалды математикалық сауаттылықты жақсартуға және оларды одан әрі оқытуға және күрделі мәселелерді шешуге дайындауға көмектеседі.

Негізгі сөздер: математика, функционалдық математикалық сауаттылық, теңдеулер, оқушылар, оқыту әдістері, логика

Қазіргі білім беру жүйесінде оқушылардың математикалық сауаттылығын дамыту өзекті мәселелердің бірі болып табылады. Алгебра курсының маңызды бөлімдерінің бірі – функционалдық теңдеулер. Олар оқушылардың аналитикалық ойлауын дамытып, математикалық модельдеуді түсінуге мүмкіндік береді. Математикалық білім беру жүйесін жаңарту оқыту әдістерін жақсартуды, оның ішінде ақпараттық – коммуникациялық технологиялар, интерактивті оқыту әдістері, графикалық және физуалды тәсілдерді қолдану, оқушылардың зерттеу жұмыстарын дамыту сияқты инновациялық әдістерді енгізуді талап етеді. Бұл бағытта оқушылардың функционалдық сауаттылығын арттыру, олардың ғылыми зерттеу дағдыларын қалыптастыру және математикалық модельдеу әдістерін үйрету – негізгі мақсаттар болып табылады.

Алгебраның маңызды тақырыптарының бірі – функционалдық теңдеулер. Олар математикалық және ғылыми проблемаларды шешуде жиі кездесетін күрделі құралдар болып табылады. Алайда функционалдық теңдеулерді оқыту дәстүрлі әдістермен қиын болуым мүмкін, себебі бұл тақырыптың абстрактылығы мен күрделілігі оқушыларға қиындық тудыруы ықтимал. Сонымен қатар, функционалдық теңдеулердің теориялық аспектілерін түсіну және оларды шешу әдістерін игеру көп уақытты талап етеді. Осыған байланысты, оқытудың заманауи технологияларын енгізу, оның ішінде нтерактивті әдістер, цифрлық құралдар мен мультимедиялық ресурстарды қолдану, оқушылардың оқу процесіне деген қызығушылығын арттыру және олардың тақырыпты терең меңгеруін қамтамасыз ету үшін маңызды.

Функционалдық теңдеулерді 6-9 сынып оқушыларына оқытудың жаңа технологияларын әзірлеуге бағытталған, өйткені қазіргі кезде бұл тақырып оқушылар үшін қиындық туғызады және оның тиімді оқытылуы математика пәні бойынша білім сапасын арттыруға үлкен әсерін тигізеді. Заманауи оқыту әдістерін, оның ішінде интерактивті және цифрлық технологияларды пайдалану оқушылардың функционалдық теңдеулерді терең меңгеруіне ықпал етеді. Мұнын нәтижесінде оқушылардың математикалық қабілеттері ғана емес, олардың жалпы оқу мотивациясы мен шығармашылық ойлау деңгейі де арта түседі. Бұл мақалада 6-9 сынып оқушыларына арналған алгебра курстарында функционалдық теңдеулерді оқытудың заманауи технологияларын жасау және енгізу жолдары қарастырылады.

Математика ғылымында теңдеулер маңызды орын алады, себебі олар көптеген нақты өмірлік есептерді модельдеуге және шешуге мүмкіндік береді. Мектеп бағдарламасында теңдеулерді оқыту 6-сыныптан бастап енгізіліп, сызықтық, квадрат, көрсеткіштік, логарифмдік, тригонометриялық және функционалдық теңдеулерді қамтиды. Бұл тақырып оқушылардың логикалық ойлау қабілетін дамытып қана қоймай, оларды аналитикалық талдау жасауға, шығармашылық тұрғыдан есептерді шешуге және өз бетімен қорытынды шығаруға үйретеді.

Теңдеулерді оқытудың тиімді әдістерін таңдау мұғалімнің кәсіби шеберлігіне тікелей байланысты. Дәстүрлі әдістер (түсіндірмелі, эвристикалық, проблемалық оқыту) мен заманауи әдістер (интерактивті оқыту, ақпараттық технологияларды қолдану, саралап оқыту) үйлесімді қолданылған жағдайда оқушылардың қызығушылығы артып, білім сапасы жоғарылайды. Сонымен қатар, математикалық сауаттылықты дамыту мақсатында қолданбалы есептер мен функционалдық теңдеулерді оқыту да маңызды.

Функционалдық теңдеу – бұл бір немесе бірнеше белгісіз функциясы бар (берілген анықталу және мәндер облысымен) теңдеу.

$f(x)$ функциясы осы функционалдық теңдеудің шешімі деп аталады, егер ол өз анықталу облысындағы барлық аргумент мәндерінде теңдеуді қанағаттандырса.

Функционалдық теңдеуді шешу дегеніміз – оған бірдей сәйкес келетін барлық функцияларды табу.

Функционалдық теңдеулер математиканың түрлі салаларында кездеседі, әсіресе белгілі бір қасиеттерге ие барлық функцияларды сипаттау қажет болатын жағдайларда. «Функционалдық теңдеу» термині, әдетте қарапайым әдістермен алгебралық теңдеулерге келтірілмейтін теңдеулерге қатысты қолданылады. Мұндай күрделілік, көбінесе, теңдеудегі белгісіз функцияның аргументтері – нақты айнымалылар емес, солардан алынған белгілі бір функциялар болуы себепті туындайды.

Кейбір функционалдық теңдеулер бізге мектеп курсынан таныс. Мысалы:

- $f(x) = f(-x)$ – функцияның жұптығын,
- $f(-x) = -f(x)$ – тақтық қасиетін,
- $f(x + T) = f(x)$ – периодтылығын сипаттайды.

Функционалдық теңдеулердің қарапайым түрінің бірі – «Тізбектер» тақырыбынан белгілі рекуренттік қатынас, ол. фрмальды түрде бүтін сандардан тәуелді белгісіз функцияны және ығысу операторын қамтиды. (Мысалы, рекуренттік қатынас: $a_{n+1} = 2a_n + 1$)[1]

Функционалдық теңдеулерді шешу мәселесі математикалық талдаудағы ең көне бағыттардың бірі. Олар функциялар теориясының алғашқы қалыптаса бастаған кезеңімен қатар пайда болды. Бұл бағыттың алғашқы қарқынды дамуы күштер параллелограмы мәселесімен байланысты. Атап айтқанда, 1769 жылы Жан Даламбер күштер қосындысы заңын негіздеу ісін келесі функционалдық теңдеуді шешу есебіне келтірді:

$$f(x + y) + f(x - y) = 2 \cdot f(x) \cdot f(y) \qquad (1)$$

Сол теңдеу дәл сол мақсатта 1804 жылы Симеон Дени Пуассон тарапынан да зерттелді, бірақ ол шешімді функцияның аналитикалығы шартымен қарастырды. Ал 1821 жылы атақты француз математигі Огюстен Коши (1789-1857) тек $f(x)$ функциясының үздіксіздігіне сүйене отырып, бұл теңдеудің жалпы шешімін тапты:

$$f(x) = cosax$$

$$f(x) = ch\ ax = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}$$

$$f(x) = 0$$

Сонымен қатар, Евклидтік емес геометриядағы паралельдік бұрышының кеңінен танымал формуласы да функционалдық теңдеуден алынған

$$f(x) = tg\frac{1}{2}\Pi(x) = e^{-\frac{x}{k}}$$

Бұл формуланы Н.И.Лобачевский (1792-1856) функционалдық теңдеуді Коши қолданған әдіске ұқсас әдіспен шешті

$f^2(x) = f(x-y) \cdot f(x+y)$ (2)

Бұл теңдеуді белгілі бір түрлендірулер арқылы келесі теңдеуге келтіруге болады:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Оның шешімі келесідей болады: $f(x) = ac^x$.

Геометриялық есептердің бірқатарын, олар функционалдық теңдеулерге алып келеді, ағылшын математигі Чарльз Бэббидж (1792-1871) қарастырған. Ол мысалы, келесі қасиетпен анықталатын екінші ретті периодтық қисықтарды зерттеген: қисықтың кез келген екі нүктесі үшін егер екінші нүктенің ординатасы бірінші нүктенің абсциссына тең болады.

Мұндай қисық $y = f(x)$ функциясының графигі болсын және $(x, f(x))$ – оның еркін нүктесі делік. Онда берілген шарт бойынша $f(x)$ абсциссасына сәйкес келетін нүктенің ординатасы x-ке тең болуы тиіс. Демек:

$$f(f(x)) = x \qquad (3)$$

(3) функционалдық теңдеуін қанағаттандыратын функцияларға мысалы ретінде келесі функциялар жатады:

$f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}, x \in [0;\ |a|]$,

$$f(x) = \frac{a}{x}, a \neq 0$$

Функционалдық теңдеулердің ең қарапайым түрлерінің бірі – Коши теңдеулері. Олардың ішінде келесі негізгі төрт теңдеу кеңінен танымал:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (4)$$

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \qquad (5)$$

$$f(xy) = f(x) + f(y) \qquad (6)$$

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \qquad (7)$$

Бұл теңдеуді Огюстен Коши өзінің «Анализ курсы» атты еңбегінде (1821ж) жанжақты зерттеген. Аталған негізгі теңдеудің үздіксіз шешімдері келесідей түрде болады:

- (4) теңдеуі үшін: $f(x) = kx$;
- (5) теңдеуі үшін: $f(x) = a^x$;
- (6) теңдеуі үшін: $f(x) = (x)$
- (7) теңдеуі үшін: $f(x) = x^k$

Алайда, үздіксіз емес функциялар класында бұл теңдеулердің басқа да (көбіне ерекше) шешімдері болуы мүмкін.

Айта кету керек, (4) теңдеуі бұдан ертерек А.М.Лежандр мен К.Ф.Гаусс еңбектерінде де кездеседі – атап айтқанда, проективтік геометрияның негізгі теоремасын қорыту барысында және Гаусс ықтималдық заңын зерттеу кезінде қолданылған.[2]

Коши теңдеуі (4) қайтадан Г.Дарбу тарапынан күштер параллелограмы мәселесі мен проективтік геометрияның негізгі теоремасына қатысты қолданылды. Оның негізгі жетістігі – шешімге қойылатын бастапқы шарттарды едәуір жеңілдетуінде болды. Белгілі болғандай, Коши функционалдық теңдеуі (4) үздіксіз функциялар класында сызықтық біртекті функция, яғни $f(x) = ax$ түріндегі функцияны сипаттайды. Дарбу өз кезегінде мынаны дәлелдеді: егер шешім еш болмаса бір нүктеде үздіксіз болса немесе кішігірім интервалда жоғарғы (немесе төменгі) шекарамен шектелген болса, онда ол міндетті түрде $f(x) = ax$ түрінде болуы тиіс.

Бұдан кейінгі зерттеулерде бұл шарттарды олан әрі әлсірету мүмкіндігі табылып, метегралданушылық, оң өлшемді жиында өлшенетін болу, тіпті өлшенетін функциямен мажорлану сияқты әлдеқайда әлсіз талаптармен де дәл осындай нәтиже алынатыны дәлелденді. Осдан келесі маңызды сұрақ туындайды:

Коши теңдеуін (4) қанағаттандыратын, бірақ сызықтық біртекті функция болып табылмайтын аддитивті функция бар ма? Мұндай функцияны табу – оңай шаруа емес!

Зерттеу барысында біз мынаны көрсетеміз:

Рационал x мәндерінде кез келген аддитивті функцияның мәні міндетті түрде қандай да бір $f(x) = ax$ сызықтық біртекті функцияның мәніне сәйкес келеді. Бұл бір қарағанда, $f(x) = ax$ теңдігі барлық нақты x үшін де орындалатын сияқты әсер қалдырды. Егер $f(x)$ үздіксіз болса – бұл рас. Алайда, егер бұл шартты алып тастасақ – онда ола олай емес. Мұндай ерекше жағдайдың алғашқы үлгісін 1905 жылы неміс математигі Г.Гамель құрды. Ол нақты сандар үшін базис ұғымын енгізу арқылы $f(x) = ax$ түрінен өзгеше, бірақ Коши теңдеуін қанағаттандыратын үздіксіз емес шешімді жасады.

Айта кету керек, функционалдық теңдеулердің көбі нақты бір фукнцияны анықтамайжы, керісінше функциялар класына тән қасиетті сипаттайды. Мысалы:

- $f(x + 1) = f(x)$ теңдеуі – периоды 1 болатын функциялар класын сипаттайды;
- $f(1 + x) = f(1 - x) - x = 1$ түзуіне қатысты симметриялы функциялар класын береді.

Қарапайым фукнционалдық теңдеулерді шешу әртүрлі функциялардың қарапайым қасиеттерін қолдануға негізделеді.

Төменде қарапайым функционалдық теңдеулер мен теңсіздіктерді шешудің бірнеше мысалын қарастырайық:

1. $y = f(x)$ функциясы R жиыныда өспелі деп берілсін. Төмендегі теңдеуді қарастырайық:

а) Теңдеуді шешіңіз: $f(3x + 2) = f(4x^2 + x)$

б) Теңсіздікті шешіңіз: $f(3x - 48) \leq f(-x^2 + x)$

Шешімі:

а) $f(3x + 2) = f(4x^2 + x)$

Мынадай терема бар: «Егер функция $f(x)$ қандай да бір X аралығында өспелі (немесе кемімелі) болса, онда ол өз мәнінің әрқайсысын осы аралықта жалғыз ғана нүктеде қабылдайды. Сондықтан

$3x + 2 = 4x^2 + x$

$4x^2 + x - 3x - 2 = 0$

$2x^2 - 2x - 2 = 0$
$x_1 = 6$ және $x_2 = -0{,}5$
Жауабы: $x_1 = 6$ және $x_2 = -0{,}5$

б) $f(3x - 48) \leq f(-x^2 + x)$
$3x - 48 \leq -x^2 + x$
$x^2 + x - 3x + 48 \leq 0$
$x^2 - 2x + 48 \leq 0$
$x_1 = 6$ және $x_2 = -8$
Жауабы: [-8; 6]

2. $y = f(x)$ функциясы R жиынында кемімелі деп берілсін. Төмендегі тесіздік қарастырайық:
$f(2x - 3) > f(x + 2)$
Шешімі: алдыңғы тапсырмадағыдай шешеміз, бірақ бұл жолы функция кемімелі болғандықтан, теңсіздіктің бағытын ауыстырамыз.
$2x - 3 < x + 2$
$2x - x < 2 + 3$
$x < 5$
Жауабы: $(-\infty;\ 5)$

3. Барлық нақты сандар үшін анықталған және нақты мән қабылдайтын f функциясы үшін келесі теңдеуді шешіңіз: $f^2(x + y) = f^2(x) + f^2(y)$
Шешімі: $x = y = 0$ деп алайық. Онда:
$f^2(0) = f^2(0) + f^2(0)$.
Бұдан: $f^2(0) = 0$, яғни $f(0) = 0$ болады.
Енді $y = -x$ деп алайық:
$f^2(x - x) = f^2(x) + f^2(-x)$
$f^2(0) = f^2(x) + f^2(-x)$
$0 = f^2(x) + f^2(-x)$
Нақты санның квадраты әрқашан теріс емес, ал екі теріс емес санның қосындысы нөлге тең болуы үшін, екі санның өзі де нөлге тең болуы қажет және жеткілікті шарт.
Осыдан $f^2(x) = 0$ барлық x үшін орындалады, яғни

$$f(x) = 0$$

осы функционалдық тедеудің жалғыз шешімі болып табылады.
Жауабы: $x = 0, y = 0$

Бұл жұмыстың мақсаты функционалдық теңдеулер ұғымын зерттеу, оларды шешу тәсілдерін іздеу және олардың практикалық қолданылуын анықтау болды. Зерттеулер барысында мен функционалдық теңдеу термині әдетте алгебралық теңдеулерге қарапайым әдістермен келтіруге болмайтын теңдеулер үшін қолданылады деген қорытындыға келдім. Оларды шешудіңәдістерін білмей, оларды іс жүзінде шешу мүмкін емес. Дегенмен, функционалдық теңдеулермен математик ғылымдары өте ертеден айналысып келеді, бірақ бұл курс мектептердің математикалық бағдарламаларында лайықты орын таппады. Өкінішті. Себебі, кейбір функционалдық теңдеулерді шешу пәнді терең түсінуді талап етеді және шығармашылық жұмысқа деген сүйіспеншілоікті қалыптастырады. Жұмыста қарастырылған мәселелер тек қана көзқарасты кеңейтумен шектелмейді, сонымен қатар оқыту функциясын да атқарады, себебі беделді жоғары оқу орындарына түсу кезінде, олимпиадаларда, ҰБТ тапсырмаларында мұндай тапсырмалар кезедеседі, бұл таңдалған тақырыптың маңыздылығын айқындайды.

Қолданылған әдебиеттер тізімі:

1. Қараев Ж.А. "Қазіргі заманғы білім беру технологиялары" – Алматы, 2019, 93с

2. Мұқатаев Т. “Алгебра және анализ бастамалары” – Астана, 2020, 307-309
3. Skopenkov M. “Functional Equations: Methods and Applications” – Springer, 2018, 151-153
4. Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі. “Жаңартылған білім беру мазмұны бойынша әдістемелік нұсқаулықтар” – Астана, 2022, 139с
5. Desmos, GeoGebra ресми сайттары: www.desmos.com, www.geogebra.org